

(RESUELTOS)

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada dos de las cuatro opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene al dividir el total de puntos entre cuatro.

OPCIÓN A

1º) Una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^T = I$. ¿Para qué valores de a y b es la siguiente matriz ortogonal?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\operatorname{sen} b \\ 0 & \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix} ; ; A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\operatorname{sen} b \\ 0 & \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b & -\operatorname{sen} b \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos b \\ 0 & -\operatorname{sen} b \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos b & \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow$$

A es ortogonal $\forall b \in \mathbb{R}$ y para $a=1$ y $a=-1$.

2º) Se considera la función $f(x) = \text{arc tag } x$. Demostrar que existe el menos un número $x \in (0, 1)$, tal que $f(x) = x$.

Para resolver este ejercicio tenemos que aplicar el Teorema del valor medio o de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Teniendo en cuenta que, según el enunciado del problema: $\text{arc tag } x = x$, podemos considerar la función $g(x) = x - \text{arc tag } x$, que cumple las condiciones del Teorema de Lagrange en el intervalo $(1, 0)$, por lo tanto será:

$$g'(c) = \frac{g(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(x) = x - \text{arc tag } x \\ g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+c^2} = \frac{(1 - \text{arc tag } 1) - (0 - \text{arc tag } 0)}{1 - 0}$$

$$\frac{1+c^2-1}{1+c^2} = \frac{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - 0}{1} \quad ;; \quad \frac{c^2}{1+c^2} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4} \quad ;; \quad 4c^2 = 4 - \pi + 4c^2 - \pi c^2 \quad ;; \quad \pi c^2 = 4 - \pi \quad ;;$$

$$c^2 = \frac{4-\pi}{\pi} < 1 \Rightarrow |c| < 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Existe al menos un valor } c \in (0, 1) \text{ que cumple la condición}}}$$

3º) Sabemos que las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+m}{3} = \frac{z}{-2}$ y $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+m}{-2}$ se cortan en un punto. Calcular el valor de m y el punto de corte.

Las expresiones por unas ecuaciones paramétricas de r y s son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -m + 3k \\ z = -2k \end{cases} \quad ; ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = -m - 2k \end{cases}$$

Si tienen un punto en común tiene que cumplirse que el valor de x tiene que ser igual para ambas rectas, lo cual nos permita calcular el valor de k, que a su vez nos permite calcular m:

$$1 + 2k = 3k \Rightarrow \underline{k=1} \Rightarrow -m + 3 \cdot 1 = 1 + 2 \cdot 1 \quad ; ; \quad -m + 3 = 1 + 2 \quad ; ; \quad \underline{\underline{m=0}}$$

$$\text{Las rectas r y s son : } r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 3k \\ z = -2k \end{cases} \quad ; ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = -2k \end{cases}$$

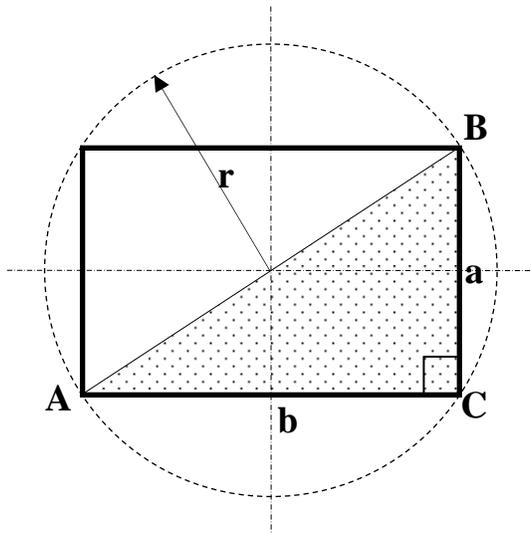
$$\text{Un punto y un vector de cada una de las rectas son: } \begin{cases} r \Rightarrow \begin{cases} \underline{P(1, 0, 0)} \\ \underline{\vec{u} = (2, 3, -2)} \end{cases} \\ s \Rightarrow \begin{cases} \underline{Q(0, 1, 0)} \\ \underline{\vec{v} = (3, 2, -2)} \end{cases} \end{cases}$$

El plano π pedido tiene como vectores directores \vec{u} y \vec{v} y contiene, por ejemplo, al punto P(1, 0, 0):

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -6(x-1) - 6y + 4z - 9z + 4(x-1) + 4y = 0 \quad ; ;$$

$$-2(x-1) - 2y - 5z = 0 \quad ; ; \quad 2x - 2 + 2y + 5z = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi \equiv 2x + 2y + 5z - 2 = 0}}$$

4º) Demostrar que el rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio r es un cuadrado. Indicar el valor del área máxima.



El área del rectángulo es: $S = \frac{a \cdot b}{2}$.

Del triángulo rectángulo ABC se deduce que:

$$(2r)^2 = a^2 + b^2 \quad ; ; \quad 4r^2 = a^2 + b^2 \quad ; ; \quad b = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Sustituyendo el valor de b en el área:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2} a \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 a^2 - a^4}$$

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que ser cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8r^2 a - 4a^3}{2\sqrt{4r^2 a^2 - a^4}} = \frac{2r^2 a - a^3}{\sqrt{4r^2 a^2 - a^4}} = 0 \Rightarrow 2r^2 a - a^3 = 0 \quad ; ; \quad a(2r^2 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = r\sqrt{2} \end{cases}$$

La primera de las soluciones carece de sentido lógico. (sería para mínimo).

Los valores de a y b son: $a = r\sqrt{2}$.

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \underline{\underline{r\sqrt{2}}} = b = a.$$

Se trata de un cuadrado, como queríamos demostrar.

El valor del área máxima es:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{(r\sqrt{2}) \cdot (r\sqrt{2})}{2} = \frac{2r^2}{2} = r^2$$

El valor del área máxima es r^2 .

OPCIÓN B

1º) Resolver el siguiente sistema cuando sea compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + ay + z = 2 \\ x + ay = 1 \\ -y + az = 0 \end{array} \right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 1 - a^2 = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

Para $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Compatible det er min ado}}$

Observando la matriz ampliada M' , tiene las columnas 1ª y 4ª iguales, por lo tanto, para determinar su rango basta con estudiar, por ejemplo, las últimas tres columnas:

Para $a = 1$ el rango de M' es:

$$M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{Rango } M' = 2$$

Para $a = -1$ el rango de M' es:

$$M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{Rango } M' = 2$$

Para $\begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Compatible in det er min ado}}$

Vamos a resolver ahora los casos en que es compatible:

1º.- $a = 1$. El sistema resultante es:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ x + y = 1 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Despreciando la 1ª ecuación y parametrizando z , queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{z = k} \Rightarrow \underline{y = k} ; ; x = 1 - y = \underline{1 - k = x} \Rightarrow \text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - k \\ y = k \\ z = k \end{array} \right.$$

2º.- a = -1. El sistema resultante es:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 2 \\ x - y = 1 \\ -y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Despreciando la 1ª ecuación y parametrizando z, queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{z = k} \Rightarrow \underline{y = -k} ; ; x = 1 + y = \underline{1 - k = x} \Rightarrow \text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - k \\ y = -k \\ z = k \end{array} \right.$$

2º) Calcular el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x^2}{x^3 - 2}$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

En el intervalo $[2, 3]$ la función $f(x)$ es continua y todas sus ordenadas son positivas, por lo tanto:

$$A = \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_2^3 \frac{x^2}{x^3 - 2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 2 = t \\ 3x^2 \cdot dx = dt \\ x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x = 3 \rightarrow t = 25 \\ x = 2 \rightarrow t = 6 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$A = \int_6^{25} \frac{1}{3} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \cdot \int_6^{25} \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \cdot [L t]_6^{25} = \frac{1}{3} \cdot [L 25 - L 6] = \frac{1}{3} \cdot L \frac{25}{6} \cong \underline{\underline{0'475 u^2 = A}}$$

3º) Enunciar el Teorema de Rolle. ¿Podemos aplicar este teorema a la función $f(x) = e^{x^2-2}$ si el intervalo $(-1, 1)$? ¿Para qué valor α es $f'(\alpha) = 0$?

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) y si se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = e^{x^2-2}$ es continua y derivable en todo su dominio, que es \mathbb{R} , por lo tanto, es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $(-1, 1)$.

Aplicando el Teorema:

$$f(x) = e^{x^2-2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(1) = e^{1^2-2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \\ f(-1) = e^{(-1)^2-2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = f(-1)$$

$$f'(x) = (2x) \cdot e^{x^2-2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \ ; \ ; \ ; \ \underline{\underline{x = 0}}$$

$$\underline{\underline{f'(0) = 0}}$$

4º) Sabemos que la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, -b, 0) + \lambda(2, -10, 1)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv 2x + ay + z = 2$ se cortan perpendicularmente y que la recta pasa por P(-1, 1, -1). Calcular a, b y el punto Q de corte.

Si la recta r y el plano π son perpendiculares, un vector normal del plano puede ser vector director de la recta, por lo cual:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv (x, y, z) = (1, -b, 0) + \lambda(2, -10, 1) \Rightarrow \underline{\vec{v} = (2, -10, 1)} \\ \pi \equiv 2x + ay + z - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\vec{n} = (2, a, 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{n} \Rightarrow \underline{\underline{a = -10}}$$

Si r pasa por el punto P(-1, 1, -1), el punto tiene que satisfacer la ecuación de r:

$$(-1, 1, -1) = (1, -b, 0) + \lambda(2, -10, 1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = 1 + 2\lambda \\ 1 = -b - 10\lambda \\ -1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\lambda = 0} \Rightarrow \underline{\underline{b = -1}}$$

$$\text{El punto Q de corte de } r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 10\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \pi \equiv 2x - 10y + z - 2 = 0 \text{ es el siguiente:}$$

$$2 \cdot (1 + 2\lambda) - 10 \cdot (1 - 10\lambda) + \lambda - 2 = 0 \quad ; ; \quad 2 + 4\lambda - 10 + 100\lambda + \lambda - 2 = 0 \quad ; ; \quad 105\lambda = 10 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\lambda = \frac{2}{21}}}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda = 1 + \frac{4}{21} = \underline{\underline{\frac{25}{21}}} = x \\ y = 1 - 10\lambda = 1 - \frac{20}{21} = \underline{\underline{\frac{1}{21}}} = y \\ z = \lambda = \underline{\underline{\frac{2}{21}}} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(\frac{25}{21}, \frac{1}{21}, \frac{2}{21}\right)}}$$
